PRIMER DÍA

Maceió, sábado, 25 de agosto de 2018

PROBLEMA 1

En un cuadrilátero convexo $ABCD$ se conoce que:

- R y S son puntos en el interior de los segmentos CD y AB respectivamente con $AD = CR$ y $BC = AS$.
- P y Q son los puntos medios de DR y SB respectivamente.
- M es el punto medio de AC.

Si se sabe que $\angle MPC + \angle MQA = 90^{\circ}$, demostrar que $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico.

PROBLEMA 2

Demostrar que todo entero positivo puede ser representado como suma de potencias de 3, 4 y 7 de modo que no aparezcan en la representación dos potencias con la misma base y el mismo exponente.

Por ejemplo: $2 = 7^0 + 7^0$ y $22 = 3^2 + 3^2 + 4^1$ no son representaciones válidas, pero $2 = 3^0 + 7^0$ y $22 = 3^2 + 3^0 + 4^1 + 4^0 + 7^1$ sí son válidas.

PROBLEMA 3

Consideramos el producto $P_n = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot n!$ donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ para todo n entero positivo.

a) Encontrar todos los enteros positivos m para los cuales $\frac{P_{2020}}{m!}$ es un cuadrado perfecto.

b) Demostrar que existen infinitos valores de n para los cuales $\frac{P_n}{m!}$ es cuadrado perfecto para por lo menos dos valores enteros positivos de m.

Duración de la prueba: 4 horas

Versión Español

Cada problema vale 10 puntos

SEGUNDO DÍA

Maceió, domingo, 26 de agosto de 2018

PROBLEMA 4

Para cada entero $n \geq 4$ se consideran m subconjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ de $\{1,2,3,\ldots,n\}$ tales que:
A_1 tiene un elemento
A_2 tiene dos elementos
$\vdots$
A_m tiene m elementos
y ninguno de estos subconjuntos está incluido en otro.

Encontrar el mayor valor posible de m.

PROBLEMA 5

Sea ABC un triángulo acutángulo con $\angle BAC = 60^\circ$ de incentro I y circuncentro O. Sea O' el punto diametralmente opuesto a O en la circunferencia circunscrita del triángulo BOC. Demostrar que

$$IO' = BI + IC.$$

PROBLEMA 6

Decimos que la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de enteros positivos es *alagoana* si para todo n entero positivo se verifican simultáneamente las dos condiciones siguientes:

- $a_{n!} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$
- a_n es la n-ésima potencia de un entero positivo.

Determinar todas las sucesiones que son alagoanas.
(Observar que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Por ejemplo, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Así, nuestra sucesión satisface, por ejemplo, $a_{24} = a_{4!} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$.)

Duración de la prueba: 4 horas — Versión Español

Cada problema vale 10 puntos